

ΘΕΩΡΙΑ ΑΠΟΔΕΞΕΩΝ-BAYES

ΜΑΘΗΜΑ : 4

ΘΕΩΡΙΑ BAYES

Αναγορεύονται από κλαστική Στατιστική Σφαιρασφααιολογία

Κλαστική Στατιστική Σφαιρασφααιολογία : Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ τυχαίο δείγμα από πληθυσμό με σ.π.π ή σ.π. $f(x|\theta)$ όπου θ είναι τιμή μιας άγνωστης παραμέτρου (θ άγνωστη αλλά σταθερή ποσότητα)

Bayes : Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ τυχαίο δείγμα από πληθυσμό με σ.π.π ή σ.π. $f(x|\theta)$, όπου θ είναι η τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής θ με γνωστή κατανομή $\pi(\theta)$

ΟΡΙΣΜΟΣ (ΕΚ ΤΩΝ ΠΡΟΤΕΡΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗ) :

Εκ των προτέρων κατανομή της τ.τ. θ είναι η κατανομή που εκφράζει την εκ των προτέρων γνώση που έχουμε για την ποσότητα θ και καθορίζεται πριν τη συλλογή των δεδομένων.

ΟΡΙΣΜΟΣ (ΕΚ ΤΩΝ ΥΣΤΕΡΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗ) :

Εκ των υστέρων κατανομή της τ.τ. θ είναι η κατανομή που εκφράζει την αναμενόμενη γνώση που έχουμε για την θ μετά τη συλλογή των δεδομένων $\pi(\theta|x)$

Ψάχνω την εκ των υστέρων :
(Βήματα)

1. Καθορισμός της $f(x|\theta)$
2. Καθορισμός $\pi(\theta)$ αντί για π στις σημειώσεις
3. Υπολογισμός της $\pi(\theta|x)$
4. Σφαιρασφααιολογία

$$\pi(\theta|x) = \frac{\text{από κοινά κατανομή}}{\text{περιθώρια κατανομή των } x} = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{\int f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta}$$

όπου $f(x|\theta)$: δεδομένη $x|\theta$
 $\pi(\theta)$: περιθώρια του θ

Αντιθέτως ψάχνω :

$$\pi(\theta|x) = \frac{f(x|\theta), \pi(\theta)}{1}$$

σταθερά (περιέχει μόνο x)
 δεν απαιτείται πάντα ο υπολογισμός του

↓ όρια ολοκλήρωσης με βάση το πεδίο ορισμού του θ

Υπενθύμιση :

Έστω A και B δύο ευδεχόμενα του δ.χ. Ω

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) \neq 0$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

αφού $P(B|A)P(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}P(A)$

Έλεγχος

Θα πρέπει $\int \pi(\theta|x) d\theta = 1$

Σύμβολο $\propto$
"ανάλογο"

$f(x|\theta) = f(x_1, \dots, x_n|\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)$

$\pi(\theta|x) = \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) \pi(\theta)}{\int \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) \pi(\theta) d\theta}$ ή ευκολότερα: $\pi(\theta|x) \propto \pi(\theta) \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Έστω X η τ.τ. με σ.π. $X|\theta \sim B(n, \theta)$
 $f(x|\theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$, $x=0,1,\dots,n$ με $0 < \theta < 1$

Αρα $0 < \theta < 1$ θα επιλέξουμε συνεχή κατανομή.
Ποιες κατανομές έχουν πεδίο ορισμού $0 < x < 1$; - Ημοιόμορφη για $U(0,1)$
- Η Βήτα $B(a, \theta)$

Η άσκηση δίνει ότι έχουμε τη Βήτα
Αρα $\theta \sim \text{Βήτα}(a, \theta)$
 $\pi(\theta) = \frac{\theta^{a-1} (1-\theta)^{\theta-1}}{B(a, \theta)}$

$\theta|x;$
 $\pi(\theta|x) = \frac{\frac{\theta^{a-1} (1-\theta)^{\theta-1}}{B(a, \theta)} \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}}{\int_0^1 \frac{\theta^{a-1} (1-\theta)^{\theta-1}}{B(a, \theta)} \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} d\theta}$
 $= \frac{\theta^{a+x-1} (1-\theta)^{n+\theta-x-1}}{\int_0^1 \theta^{a+x-1} (1-\theta)^{n+\theta-x-1} d\theta}$

Επειδή θέλουμε τη κατανομή αυτή
Αρα δεν είναι απαραίτητο να
επιλογιστούμε το ολοκλήρωμα
(αφού είναι σταθερό)

Έχουμε $0 < \theta < 1 \leadsto$ Αρα θα μπορούσε να είναι ομοιόμορφη ή Βήτα

Από το τυπολόγιο:

$\theta|x \sim \text{Βήτα}(a+x, n+\theta-x) \leadsto$ Ανανέματα τη πληροφορία για το θ .
Δεν έχουμε $B(a, \theta)$, έχουμε $B(a+x, n+\theta-x)$
 $B(a, \theta) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{\theta-1} dx$

Συμπεράσμα
Συμπεράσμα εκ των προτέρων κατανομή

Όταν η εκ των υστέρων κατανομή ανήκει στην ίδια οικογένεια κατανομών που ανήκει η εκ των προτέρων κατανομή, τότε λέμε ότι είναι συμπεράσμα εκ των προτέρων κατανομή.

2ο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ τυχαίο δείγμα από $\text{Poisson}(\theta)$, όπου θ είναι η τιμή της τ.λ. θ
 $\mu \in \text{Gamma}(p, \frac{1}{q})$

Αφού $\theta \sim P(\theta)$ έχουμε $f(x_i; \theta) = \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i!}$, $x_i = 0, 1, \dots$
 $\theta > 0$

$\pi(\theta) \sim \text{Gamma}(p, \frac{1}{q})$

$$\pi(\theta) = \frac{\theta^{p-1} e^{-\theta/(1/q)}}{(\frac{1}{q})^p \Gamma(p)}, \quad \theta > 0$$

$$\pi(\theta|x) = \frac{q^p \frac{\theta^{p-1} e^{-q\theta}}{\Gamma(p)} \cdot \prod_{i=1}^n \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i!}}{\int \frac{q^p \theta^{p-1} e^{-q\theta}}{\Gamma(p)} \cdot \frac{\theta^{\sum x_i} e^{-n\theta}}{\prod x_i!} d\theta} = \frac{\frac{q^p \theta^{p-1} e^{-q\theta}}{\Gamma(p)} \cdot \frac{\theta^{\sum x_i} e^{-n\theta}}{\prod x_i!}}{\int \frac{q^p \theta^{p-1} e^{-q\theta}}{\Gamma(p)} \cdot \frac{\theta^{\sum x_i} e^{-n\theta}}{\prod x_i!} d\theta} = \frac{\theta^{p+\sum x_i-1} e^{-(q+n)\theta}}{\int_0^{+\infty} \theta^{p+\sum x_i-1} e^{-(q+n)\theta} d\theta}, \quad \theta > 0$$

Μοιάζει ο αριθμητής με γνωστή κατανομή;
 $\theta|x \sim \text{Gamma}(p+\sum x_i, \frac{1}{q+n})$

$$\pi(\theta|x) = \frac{\theta^{p+\sum x_i-1} e^{-(q+n)\theta}}{(\frac{1}{q+n})^{p+\sum x_i} \Gamma(p+\sum x_i)}, \quad \theta > 0$$

3ο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ από τυχαίο δείγμα $U(0, \theta)$, όπου θ είναι η τιμή της τ.λ. θ & $\in$ εκ των προτέρων κατανομή $\pi(\theta)$ συν $U(0, 1)$

Αυτά σημαίνουν: $f(x_i; \theta) = \frac{1}{\theta}$, $0 < x_i < \theta$

$$\pi(\theta) = 1 \quad 0 < \theta < 1$$

$$x_{(n)} < \theta < 1.$$

Για να βρω άκρα ολοκλήρωσης
 πρέπει να πληρούνται τα παρακάτω:

$$\begin{cases} 0 < x_1 < \theta \\ 0 < x_2 < \theta \\ \vdots \\ 0 < x_n < \theta \\ 0 < \theta < 1 \end{cases} \Rightarrow \max\{0, x_1, \dots, x_n\} < \theta < 1 \Rightarrow \Rightarrow \max\{x_1, \dots, x_n\} < \theta < 1$$

$\parallel$
 $x_{(n)}$
 μέγιστο
 διατεταγμένο
 στατιστικό

$$x_{(1)} = \min\{x_1, \dots, x_n\}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

$$\pi(\theta) = (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}\theta^2}, \theta \in \mathbb{R}$$

$$\pi(\theta|x) = \frac{(2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}\theta^2} \prod_{i=1}^n (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(x_i - \theta)^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}\theta^2} \prod_{i=1}^n (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(x_i - \theta)^2} d\theta}$$

αφού $\theta \in \mathbb{R}$

$$\pi(\theta|x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\theta^2} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\theta^2} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2} d\theta} \Rightarrow \pi(\theta|x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\theta^2} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\theta + \theta^2)}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\theta^2} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\theta + \theta^2)} d\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi(\theta|x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\theta^2} e^{-\frac{1}{2}\sum x_i^2} e^{-\frac{1}{2}(-2)\theta \sum x_i} e^{-\frac{1}{2}n\theta^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\theta^2} e^{-\frac{1}{2}\sum x_i^2} e^{\theta \sum x_i} e^{-\frac{1}{2}n\theta^2} d\theta} \Rightarrow \pi(\theta|x) = \frac{e^{-\frac{n+1}{2}\theta^2} e^{\theta \sum x_i}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n+1}{2}\theta^2} e^{\theta \sum x_i} d\theta}, \theta \in \mathbb{R}$$

Γράφω ότι ήξει το τυπολόγιο: $x \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$(2\pi\sigma^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} = \underbrace{(2\pi\sigma^2)^{-1/2}}_{\text{σταθερά}} \underbrace{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(-2)x\mu}}_{\text{θέλω αυτό το κομμάτι να μοιάζει με αυτό που υπάρχει στον ορισμό}} \underbrace{e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}}_{\text{σταθερά}}$$

θέλω αυτό το κομμάτι να μοιάζει με αυτό που υπάρχει στον ορισμό

Άρα $\theta|x \sim N(\frac{\sum x_i}{n+1}, \frac{1}{n+1})$

$$\pi(\theta|x) = (2\pi \frac{1}{n+1})^{-1/2} e^{-\frac{n+1}{2}(\theta - \frac{\sum x_i}{n+1})^2}, \theta \in \mathbb{R}$$

Παρατήρηση:

Πολλές φορές οι ερευνητές δεν έχουν προηγούμενες πληροφορίες για το θ . Για το λόγο αυτό πρέπει να χρησιμοποιήσουν τις λεγόμενες "ήπιες πληροφορίες" εκ των προτέρων κατανομή. Δηλαδή εκ των προτέρων κατανομή που δεν δίνει πληροφορίες για το παράμετρο θ . Μια τέτοια εκ των προτέρων κατανομή είναι αυτή που έχει προταθεί στη βιβλιογραφία και είναι γνωστή ως εκ των προτέρων Jeffreys

$$\pi(\theta) \propto \left[-E_{x|\theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(x|\theta) \right) \right]^{-1/2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ :

$$H \mid \theta \sim B(n, \theta)$$

$$f(x|\theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}, \quad x=0,1,\dots,n$$

Βρείτε την $\pi(\theta)$ του Jeffreys και την συνέχισή $\pi(\theta|x)$.

$$\log f(x, \theta) = \log \binom{n}{x} + x \log \theta + (n-x) \log (1-\theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(x|\theta) = \frac{x}{\theta} + (n-x) \frac{1}{1-\theta} (-1) = \frac{x}{\theta} - \frac{n-x}{1-\theta}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(x|\theta) = -\frac{x}{\theta^2} + \frac{n-x}{(1-\theta)^2} (-1) = -\left[\frac{x}{\theta^2} + \frac{n-x}{(1-\theta)^2} \right]$$

Στη συνέχεια θέλω να υπολογίσω

$$-E_{x|\theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(x|\theta) \right) = E_{x|\theta} \left(\frac{x}{\theta^2} + \frac{n-x}{(1-\theta)^2} \right) = \frac{E_{x|\theta} x}{\theta^2} + n - \frac{E_{x|\theta} x}{(1-\theta)^2} =$$
$$\underbrace{x|\theta \sim B(n, \theta)}_{\frac{n\theta}{\theta^2} + \frac{n-n\theta}{(1-\theta)^2} = \frac{n}{\theta(1-\theta)}}$$

$$\pi(\theta) \propto \left[\frac{n}{\theta(1-\theta)} \right]^{1/2} \quad \text{δηλ.} \quad \pi(\theta) \propto \theta^{-1/2} (1-\theta)^{-1/2}, \quad \theta \in (0,1)$$

$$\text{Βίντα: } \frac{\theta^{\alpha-1} (1-\theta)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} \quad \alpha-1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} \quad \pi(\theta) \text{ είναι Βίντα } \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$$
$$\beta-1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Ειδική περίπτωση $\alpha = \frac{1}{2}$
 $\beta = \frac{1}{2}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Κάποιες φορές χρησιμοποιώντας την εκ των προτέρων κατανομή Jeffreys μπορεί να καταλήξετε σε ένα αποτέλεσμα που δεν είναι σ.π.π., τότε θα πείτε ότι πρόκειται για η ακατάλληλη (Improper) εκ των προτέρων κατανομή

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΛΛΗ ΦΟΡΑ:

- ① $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από $\Gamma(k, \frac{1}{\theta})$. Η $\pi(\theta)$ είναι $\Gamma(p, \frac{1}{q})$. Βρείτε την $\pi(\theta|x)$
- ② $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από $\text{Geo}(\theta)$. Η $\pi(\theta)$ είναι Βίντα με Βίντα (p, q) . Βρείτε την $\pi(\theta|x)$
- ③ $X_1, \dots, X_n$ τ.δ. από κανονική με $N(\theta, \frac{1}{\tau})$. Η $\pi(\theta)$ είναι κανονική με $N(b, \frac{1}{c})$
Να βρεθεί η $\pi(\theta|x)$.